

[問題Ⅲ] (やや難)

$\triangle ABC$ において、 $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ のとき、垂心を H とする。

(1) $a, b, c, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ を使って \overrightarrow{AH} を求めよ。

(2) 原点を O とするとき、 $a, b, c, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ を使って \overrightarrow{OH} を求めよ。

[解答]

(1)

$\triangle ABC$ において、頂点 A, B, C から対辺 BC, CA, AB にそれぞれ垂線 AP, BQ, CR を下ろし、その交点を垂心 H とする。

このとき、 $\overrightarrow{AH} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ (x, y は実数) と表すことができるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BH} &= \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AB} \\ &= (x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{AB} \\ &= (x-1)\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

ここで、 $BH \perp AC$ だから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} &= 0 \\ \{(x-1)\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}\} \cdot \overrightarrow{AC} &= 0 \\ (x-1)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + y|\overrightarrow{AC}|^2 &= 0\end{aligned}$$

ここで、余弦定理より $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$ だから、

$$\begin{aligned}(x-1) \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} + y \cdot b^2 &= 0 \\ \therefore (b^2 + c^2 - a^2)x + 2b^2y &= b^2 + c^2 - a^2 \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

同様に、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CH} &= \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AC} \\ &= (x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{AC} \\ &= x\overrightarrow{AB} + (y-1)\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

ここで、 $CH \perp AB$ だから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\ \{x\overrightarrow{AB} + (y-1)\overrightarrow{AC}\} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\ x|\overrightarrow{AB}|^2 + (y-1)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= 0 \\ x \cdot c^2 + (y-1) \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} &= 0 \\ \therefore 2c^2x + (b^2 + c^2 - a^2)y &= b^2 + c^2 - a^2 \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

①-②

$$(b^2 - c^2 - a^2)x + (b^2 - c^2 + a^2)y = 0$$

∴

$$y = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{a^2 + b^2 - c^2} x \quad \dots \textcircled{3}$$

これを①に代入

$$(b^2 + c^2 - a^2)x + 2b^2 \cdot \frac{a^2 - b^2 + c^2}{a^2 + b^2 - c^2} x = b^2 + c^2 - a^2$$
$$\frac{(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + b^2 - c^2) + 2b^2(a^2 - b^2 + c^2)}{a^2 + b^2 - c^2} x = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\begin{aligned} \therefore x &= \frac{(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)}{(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2) + 2b^2(a^2 - b^2 + c^2)} \\ &= \frac{-(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 - c^2)}{\{b^2 + (a^2 - c^2)\}\{b^2 - (a^2 - c^2)\} + 2b^2(a^2 - b^2 + c^2)} \\ &= \frac{-(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 - c^2)}{b^4 - (a^2 - c^2)^2 + 2b^2(a^2 - b^2 + c^2)} \\ &= \frac{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 - c^2)}{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2} \\ &= \frac{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 - c^2)}{c^4 - 2(a^2 + b^2)c^2 + (a^2 - b^2)^2} \\ &= \frac{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 - c^2)}{\{c^2 - (a+b)^2\}\{c^2 - (a-b)^2\}} \\ &= \frac{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 - c^2)}{\{c + (a+b)\}\{c - (a+b)\}\{c + (a-b)\}\{c - (a-b)\}} \\ &= \frac{(a^2 + b^2 - c^2)(-a^2 + b^2 + c^2)}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \end{aligned}$$

これを③に代入すると、

$$y = \frac{(a^2 - b^2 + c^2)(-a^2 + b^2 + c^2)}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

以上のことより、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} &= \frac{(a^2 + b^2 - c^2)(-a^2 + b^2 + c^2)}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \overrightarrow{AB} \\ &\quad + \frac{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

(2)(1)より、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} &= x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} &= x(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + y(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \\ \therefore \overrightarrow{OH} &= (1-x-y)\overrightarrow{OA} + x\overrightarrow{OB} + y\overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

ここで(1)より、

$$\begin{aligned}
& 1-x-y \\
&= 1 + \frac{(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2-c^2)}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} + \frac{(a^2-b^2+c^2)(a^2-b^2-c^2)}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \\
&= 1 + \frac{(a^2-b^2-c^2)}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \{ (a^2+b^2-c^2) + (a^2-b^2+c^2) \} \\
&= \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) + 2a^2(a^2-b^2-c^2)}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \\
&= \frac{(-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2) + 2a^2(a^2-b^2-c^2)}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \\
&= \frac{a^4-b^4-c^4+2b^2c^2}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \\
&= \frac{a^4-(b^2-c^2)^2}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \\
&= \frac{\{a^2+(b^2-c^2)\}\{a^2-(b^2-c^2)\}}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \\
&= \frac{(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}
\end{aligned}$$

以上のことより、

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OH} &= \frac{(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \overrightarrow{OA} \\
&\quad + \frac{(a^2+b^2-c^2)(-a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \overrightarrow{OB} \\
&\quad + \frac{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \overrightarrow{OC}
\end{aligned}$$